TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 09

Funciones integrables

Definición 1. *Se dice que una función medible f es integrable sobre un conjunto $E \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ si $\int_E |f|\, d\lambda < \infty$.*

Proposición 1. *Si f es una función integrable sobre $\mathbb{R}$, entonces f es finita casi en todas partes.*

Demostración
El resultado es un corolario de la proposición **??**

■

Proposición 2. *Una función medible f es integrable sobre un conjunto medible E si y sólo si f^+ y f^- son integrables sobre E.*

Demostración

Se tiene $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$, así que si f es una función medible integrable sobre E, entonces f^+ y f^- son también integrables sobre E.

Inversamente, si f^+ y f^- son integrables sobre E, entonces $\int_E |f|\, d\lambda = \int_E f^+ d\lambda + \int_E f^- d\lambda$, así que f es también integrable sobre E.

■

Definición 2. *Si f una función medible e integrable sobre un conjunto medible E, se define su integral sobre E, $\int_E f d\lambda$, de la siguiente manera:*

$$\int_E f d\lambda = \int_E f^+ d\lambda - \int_E f^- d\lambda$$

Proposición 3. *Sean f y g dos funciones medibles e integrables sobre un conjunto medible E, entonces:*

1. *Para cualquier número real c, la función cf es integrable sobre E y:*
   $\int_E cf d\lambda = c\int_E f d\lambda$
2. *Si $f \leq g$ sobre E, entonces $\int_E f d\lambda \leq \int_E g d\lambda$.*
3. $\left|\int_E f d\lambda\right| \leq \int_E |f|\, d\lambda$.

Demostración

1. $|cf| \leq |c|\,|f|$, así que $\int_E |cf|\, d\lambda < \infty$.

Si $c < 0$, se tiene:

$(cf)^+ = |c|\, f^-$ y $(cf)^- = |c|\, f^+$, así que:

$\int_E cf d\lambda = \int_E |c|\, f^- d\lambda - \int_E |c|\, f^+ d\lambda$

$= -c\int_E f^- d\lambda + c\int_E f^+ d\lambda = c\left(\int_E f^- d\lambda + \int_E f^+ d\lambda\right)$

$= c\int_E f d\lambda$

Si $c \geq 0$, se tiene:

$(cf)^+ = cf^+$y $(af)^- = cf^-$, así que:

$\int_E cf d\lambda = \int_E cf^+ d\lambda - \int_E cf^- d\lambda = c\left(\int_E f^+ d\lambda - \int_E f^- d\lambda\right)$

$= c\int_E f d\lambda$

2. Si $f \leq g$ sobre E, entonces $g - f \geq 0$ sobre E, así que:

$$\int_E g d\lambda - \int_E f d\lambda = \int_E (g - f)\, d\lambda \geq 0$$

Por lo tanto:

$$\int_E f d\lambda \leq \int_E g d\lambda$$

4. $\left|\int_E f d\lambda\right| = \left|\int_E f^+ d\lambda - \int_E f^- d\lambda\right| \leq \int_E f^+ d\lambda + \int_E f^- d\lambda = \int_E |f|\, d\lambda$.

■

Proposición 4. *Sean f y g dos funciones medibles e integrables sobre un conjunto medible E y $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible tal que $h(x) = f(x) + g(x)$ en todos los puntos $x \in E$ para los cuales $f(x) + g(x)$ esté definida, entonces h es integrable sobre E y:*

$$\int_E h d\lambda = \int_E f d\lambda + \int_E g d\lambda$$

Demostración

Sea $\Gamma = \{x \in E : f(x) + g(x) \text{ está definida}\}$.

Como f y g son integrables sobre E, $\lambda(E - \Gamma) = 0$, así que:

$$\int_E |f| I_{E-\Gamma} d\lambda = \int_E |g| I_{E-\Gamma} d\lambda = \int_E |h| I_{E-\Gamma} d\lambda = 0$$

Por otra parte:

$|hI_\Gamma| = |fI_\Gamma + gI_\Gamma| \leq |fI_\Gamma| + |gI_\Gamma|$, así que $\int_E |h| I_\Gamma d\lambda < \infty$.

Además:

$(fI_\Gamma + gI_\Gamma)^+ - (fI_\Gamma + gI_\Gamma)^- = fI_\Gamma + gI_\Gamma = (fI_\Gamma)^+ - (fI_\Gamma)^- + (gI_\Gamma)^+ - (gI_\Gamma)^-$

$= (fI_\Gamma)^+ + (gI_\Gamma)^+ - (fI_\Gamma)^- + (gI_\Gamma)^-$

Así que:

$(fI_\Gamma + gI_\Gamma)^+ + (fI_\Gamma)^- + (gI_\Gamma)^- = (fI_\Gamma + gI_\Gamma)^- + (fI_\Gamma)^+ + (gI_\Gamma)^+$

Por lo tanto:

$\int_E (fI_\Gamma + gI_\Gamma)^+ d\lambda + \int_E (fI_\Gamma)^- d\lambda + \int_E (gI_\Gamma)^- d\lambda$

$= \int_E (fI_\Gamma + gI_\Gamma)^- d\lambda + \int_E (fI_\Gamma)^+ d\lambda + \int_{\mathbb{E}} (gI_\Gamma)^+ d\lambda$

De lo cual se sigue:

$\int_E hI_\Gamma d\lambda = \int_E (fI_\Gamma + gI_\Gamma) d\lambda = \int_E (fI_\Gamma + gI_\Gamma)^+ d\lambda - \int_E (fI_\Gamma + gI_\Gamma)^- d\lambda$

$= \int_E (fI_\Gamma)^+ d\lambda + \int_E (gI_\Gamma)^+ d\lambda - \int_E (fI_\Gamma)^- d\lambda - \int_E (gI_\Gamma)^- d\lambda$

$= \left(\int_E (fI_\Gamma)^+ d\lambda - \int_E (fI_\Gamma)^- d\lambda\right) + \left(\int_E (gI_\Gamma)^+ d\lambda - \int_E (gI_\Gamma)^- d\lambda\right)$

$= \int_E fI_\Gamma d\lambda + \int_E gI_\Gamma d\lambda$

■

Un razonamiento de inducción permite demostrar el siguiente corolario:

Corolario 1. *Sean $f_1, \ldots, f_n$ n funciones medibles e integrables sobre un conjunto medible E, $a_1, \ldots, a_n$ números reales y $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible tal que $h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ en todos los puntos $x \in E$ para los cuales $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ esté definida, entonces h es integrable sobre E y:*

$$\int_E h d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_E f_k d\lambda$$

Proposición 5. *Sean f y g dos funciones medibles e integrables, entonces:*

1. *Si $\int_E g d\lambda \geq 0$ para cualquier $E \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$, entonces $\lambda \{x \in \mathbb{R} : g(x) < 0\} = 0$.*
2. *$\int_E f d\lambda \leq \int_E g d\lambda$ para cualquier $E \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$, entonces $\lambda \{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\} = 0$.*
3. *$\int_E f d\lambda = \int_E g d\lambda$ para cualquier $E \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$, entonces $\lambda \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\} = 0$.*

Demostración

Supongamos que $\int_E g d\lambda \geq 0$ para cualquier $E \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E_n = \left\{x \in \mathbb{R} : g(x) < -\frac{1}{n}\right\}$, entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$0 \leq \int_{E_n} g d\lambda \leq -\frac{1}{n} \lambda(E_n)$$

Así que $\lambda(E_n) = 0$.

Finalmente, $\lambda \{x \in \mathbb{R} : g(x) < 0\} = \lambda(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \lambda(E_n) = 0$.

Las otras dos afirmaciones se siguen como corolario de la primera.

$\blacksquare$

Pasemos ahora a demostrar el segundo de los teoremas de convergencia de la integral.

Teorema 1. *Sea g una función no negativa, integrable sobre un conjunto medible E y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ y $f = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces:*

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\lambda = 0$$

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n = 2g - |f_n - f|$, entonces, por el lema de Fatou, se tiene:

$2 \int_E g d\lambda = \int_E \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} h_n d\lambda$

$\leq \text{lím inf}_{n\rightsquigarrow\infty} \int_E h_n d\lambda = 2 \int_E g d\lambda - \text{lím sup}_{n\rightsquigarrow\infty} \int_E |f_n - f| \, d\lambda$

Así que:

$$\text{lím sup}_{n\rightsquigarrow\infty} \int_E |f_n - f| \, d\lambda = 0$$

■

Corolario 2 (Teorema de la convergencia dominada). *Sea g una función no negativa, integrable sobre un conjunto medible E, y $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ y $\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces:*

$$\int_E \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} f_n d\lambda = \text{lím}_{n\to\infty} \int_E f_n d\lambda$$

Demostración

Sea $f = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} f_n$. Entonces:

$\left|\int_E f d\lambda - \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \int_E f_n d\lambda\right| = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \left|\int_E (f_n - f) \, d\lambda\right| \leq \text{lím}_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\lambda = 0$

■

Funciones de variación acotada

Definición 3. *Dada una función* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y una partición* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *del intervalo* $[a, b]$*, definamos* $V_g(P) = \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$.

Diremos que g *es de variación acotada en* $[a, b]$ *si:*

$V_g[a, b] = \sup \{V_g(P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\} < \infty$

Proposición 6. *Si* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es de variación acotada, entonces está acotada.*

Demostración

Dado cualquier punto $x \in [a, b]$, consideremos la partición $P = \{a, x, b\}$; se tiene entonces:

$|f(x)| - |f(a)| \leq |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| = V_g(P) \leq V_g[a, b]$

Así que:

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_g[a, b]$$

$\blacksquare$

Proposición 7. *Sea* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y* $c \in [a, b]$*, entonces* $V_g[a, b] = V_g[a, c] + V_g[c, b]$.

Demostración

Si P_1 es una partición de $[a, c]$ y P_2 es una partición de $[c, b]$, entonces $P = P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, b]$ y se tiene:

$$V_g(P_1) + V_g(P_2) = V_g(P) \leq V_g[a, b]$$

Por lo tanto:

$$V_g[a, c] + V_g[c, b] \leq V_g[a, b]$$

Para probar la otra desigualdad, sea P una partición de $[a, b]$ y $P_0 = P \cup \{c\}$, entonces:

$P_1 = P_0 \cap [a, c]$ es una partición de $[a, c]$.

$P_2 = P_0 \cap [c, b]$ es una partición de $[c, b]$.

y se tiene:

$$V_g(P_0) = V_g(P_1) + V_g(P_2) \leq V_g[a, c] + V_g[c, b]$$

Por otra parte, si $c \in P$, entonces $V_g(P) = V_g(P_0)$, mientras que si $c \notin P$, entonces $c \in (x_k, x_{k+1})$, donde x_k y x_{k+1} son dos puntos consecutivos de P, así que:

$$|g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq |g(x_{k+1}) - g(c)| + |g\,(c) - g(x_k)|$$

Por lo tanto, en cualquier caso:

$$V_g(P) \leq V_g(P_0) \leq V_g[a, c] + V_g[c, b]$$

Así que:

$$V_g[a, b] \leq V_g[a, c] + V_g[c, b]$$

■

Corolario 3. *Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in [a, b]$, entonces g es de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si es de variación acotada en cada uno de los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$.*

Corolario 4. *Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $[c, d] \subset [a, b]$, entonces $V_g\,[c, d] \leq V_g[a, b]$.*

Teorema 2. *El conjunto de funciones de variación acotada, definidas en un mismo intervalo $[a, b]$, forma un espacio vectorial.*

Demostración

Obviamente, si g es de variación acotada y $c \in \mathbb{R}$, entonces cg es de variación acotada.

Sean f y g funciones de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ cualquier partición de $[a, b]$. Se tiene:

$V_{f+g}(P) = \sum_{i=1}^{n} |(f + g)(x_i) - (f + g)(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |[f(x_i) - f(x_{i-1})] + [g(x_i) - g(x_{i-1})]|$

$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq V_f[a, b] + V_g[a, b]$

Así que, tomando supremos:

$$V_{f+g}[a, b] \leq V_f[a, b] + V_g[a, b] < \infty$$

Por lo tanto $f + g$ es de variación acotada en $[a, b]$.

■

Proposición 8. *Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona, entonces es de variación acotada.*

Demostración

Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es cualquier partición de $[a, b]$, entonces:

$$V_g(P) = \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| = |g\,(b) - g\,(a)|$$

Así que:

$$V_g[a, b] = |g\,(b) - g\,(a)| < \infty$$

■

Corolario 5. *Si $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones no decrecientes, entonces $g_1 - g_2$ es de variación acotada.*

Corolario 6. *Si $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones no decrecientes, entonces $g_1 - g_2$ es de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto.*

Teorema 3. *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, entonces se puede expresar como la diferencia de dos funciones no decrecientes.*

Demostración

La idea de la demostración consiste en definir una función V, no decreciente, tal que $V - g$ también sea no decreciente.

Hay un problemita que es necesario salvar para poder definir la función V; se trata de que estamos tomando una función g definida sobre todo $\mathbb{R}$ de la cual únicamente sabemos que es de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto.

Si $a \in \mathbb{R}$, definamos $V : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ como $V\,(x) = V_g\,[a, x]$ y tomemos $x, y \in [a, \infty)$ tales que $x < y$; entonces se tiene:

$$V_g\,[a, y] = V_g\,[a, x] + V_g\,[x, y]$$

Así que:

$$V\,(y) - V\,(x) = V_g\,[x, y] \geq 0$$

Por lo tanto, V es una función no decreciente.

Además, como $V_g\,[x, y] \geq g\,(y) - g\,(x)$, entonces $V\,(y) - V\,(x) \geq g\,(y) - g\,(x)$; por lo tanto:

$$V\left(y\right)-g\left(y\right)\geq V\left(x\right)-g\left(x\right)$$

Así que $V-g$ es no decreciente sobre el intervalo $[a,\infty)$.

Pero, como decíamos, g está definida sobre todo $\mathbb{R}$; así que es necesario hacer algunos ajustes en la definición de V con el objeto de tenerla definida sobre todo $\mathbb{R}$. Para esto, podemos tomar un número real arbitrario a_0 y primero definir V sobre el intervalo $(-\infty,a_0]$ y después sobre el intervalo $[a_0,\infty)$.

Sobre $(-\infty,a_0]$ podemos definir $V\left(x\right)=-V_g\left[x,a_0\right]$ (el signo $-$ es para que V sea no decreciente); mientras que sobre $[a_0,\infty)$ podemos definir $V\left(x\right)=V_g\left[a_0,x\right]$. La función V así definida toma valores menores o iguales a cero sobre $(-\infty,a_0]$ y valores mayores o iguales a cero sobre $[a_0,\infty)$ (en 0 toma el valor 0); así que es una función no decreciente definida sobre todo $\mathbb{R}$.

Por comodidad vamos a tomar $a_0=0$.

Definamos entonces la función $V:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$V\left(x\right)=\begin{cases}-V_g\left[x,0\right] & \text{si } x\in(-\infty,0)\\ 0 & \text{si } x=0\\ V_g\left[0,x\right] & \text{si } x\in(0,\infty)\end{cases}$$

Si $x<y$, se tiene:

$$V\left(y\right)=V\left(x\right)+V_g[x,y]$$

Así que:

$$V\left(y\right)-V\left(x\right)=V_g[x,y]\geq 0$$

Por lo tanto:

$$V\left(y\right)\geq V\left(x\right)$$

Así que V es una función no decreciente.

Además:

$$V_g[x,y]\geq\left|g\left(y\right)-g\left(x\right)\right|\geq g\left(y\right)-g\left(x\right)$$

Por lo tanto:

$$V\left(y\right)-V\left(x\right)\geq g\left(y\right)-g\left(x\right)$$

Así que:

$$V(y) - g(y) \geq V(x) - g(x)$$

Es decir, $V - g$ es una función no decreciente.

Definiendo $h_1 = V$ y $h_2 = V - g$, se tiene:

$$g = h_1 - h_2$$

■

Combinando los dos últimos resultados, se tiene el siguiente:

Teorema 4. *Una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto si y sólo si se puede expresar como la diferencia de dos funciones no decrecientes.*

Estudio de las discontinuidades de una función de variación acotada

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no decreciente. Por ser monótona, f tiene límites por la derecha y por la izquierda en todo punto $x \in \mathbb{R}$; en efecto, sea $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces:

$f(x) \geq f(x_0)$ para cualquier $x > x_0$.

$f(x) \leq f(x_0)$ para cualquier $x < x_0$.

Así que el conjunto $\{f(x) : x > x_0\}$ está acotado por abajo y el conjunto $\{f(x) : x < x_0\}$ está acotado por arriba. Por lo tanto:

$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf \{f(x) : x > x_0\} \in \mathbb{R}$

$f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = \sup \{f(x) : x < x_0\} \in \mathbb{R}$

Por lo anterior, f no tiene discontinuidades oscilatorias; es decir, todas sus discontinuidades son de salto.

Proposición 9. *Toda función no decreciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene a lo más un conjunto numerable de discontinuidades.*

Demostración

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y definamos:

$A_{m,n} = \left\{x \in (-m, m) : f(x+) - f(x-) > \frac{1}{n}\right\}$

$A_m = \{x \in (-m, m) : f(x+) \neq f(x-)\}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x+) \neq f(x-)\}$

Sea $M \in N$ tal que $\frac{M}{n} > f(m) - f(-m)$.

Si $k \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A_{m,n}$ y $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, entonces:

$$f(m) - f(-m) \geq \sum_{j=1}^{k} [f(x_k+) - f(x_k-)]$$

Así que:

$$\tfrac{k}{n} < \sum_{j=1}^{k} [f(x_j+) - f(x_j-)] < \tfrac{M}{n}$$

Por lo tanto, $k < M$; así que $A_{m,n}$ es un conjunto finito.

Además:

$$A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n}$$

Por lo tanto, A_m es un conjunto a lo más infinito numerable.

Finalmente:

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

Así que, también A es un conjunto a lo más infinito numerable.

∎

Corolario 7. *Una función de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto tiene a lo más un conjunto numerable de discontinuidades.*

Teorema 5. *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, entonces se puede expresar como la diferencia de dos funciones no decrecientes, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, las cuales no tienen discontinuidades en común del mismo lado.*

Corolario 8. *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua por la derecha y de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, entonces se puede expresar como la diferencia de dos funciones no decrecientes continuas por la derecha.*

Corolario 9. *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua por la izquierda y de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, entonces se puede expresar como la diferencia de dos funciones no decrecientes continuas por la izquierda.*

Corolario 10. *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, entonces se puede expresar como la diferencia de dos funciones no decrecientes continuas.*